Théorème de Cauchy-Lipschitz

Leçons : 205, 220, 221

Réf. :

Th. (Cauchy-Lipschitz local)

Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Soit $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $(t_0, x_0) \in J \times U$.

Soit $\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times Bf(x_0, R)$ un cylindre de sécurité.

Si $f_{|\mathcal{C}}$ est k-lipschitzienne par rapport à la seconde variable

Alors pour tout intervalle ouvert $I \subset [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ où $t_0 \in I$, il existe une unique solution $x : I \to U$ de $x' = f(t, x)$ telle que $x(t_0) = x_0$.

Th. (Cauchy-Lipschitz global)

Soit $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Si f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe une unique solution maximale $x : I \subset J \to U$ de $x' = f(t, x)$ telle que $x(t_0) = x_0$

Cauchy-Lipschitz local

1) Réduction de la recherche d'une solution $\mathcal{C}^1$ à "une solution $\mathcal{C}^0$"

Soit $(t_0, x_0) \in J \times U$, $I \subset J$ un sous-intervalle ouvert tel que $t_0 \in I$.

Soit $x : I \to U$ une fonction continue. Alors :

x est $\mathcal{C}^1$ et est solution de $x' = f(t, x)$ de CI (t_0, x_0)

$$\Updownarrow$$

$$\forall t \in I,\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

$\Rightarrow$ x est $\mathcal{C}^1$ donc $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$

$\Leftarrow$ $s \longmapsto f(s, x(s))$ est continue, donc $x : t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$ est $\mathcal{C}^1$, solution de $x' = f(t, x)$ et $x(t_0) = x_0$.

Rq : l'intérêt est de manipuler des fonctions uniquement supposées continues et non plus $\mathcal{C}^1$, et donc d'avoir un espace complet "simple" sur lequel utiliser le théorème du point fixe.

On considère $I \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$, intervalle ouvert tel que $t_0 \in I$.

2) Ramener l'existence et l'unicité à un problème de point fixe

On pose $E = \{x : I \longrightarrow B_f(x_0, R) \text{ continue}\}$

et $\Phi : E \longrightarrow E$) à prouver

$$x \longmapsto \Phi(x) : I \longrightarrow B_f(x_0, R)$$
$$t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

Alors : a°/ Φ est bien définie

b°/ (E, d_∞) est complet (où $d_\infty(y, z) = \sup_{t \in I} |y(t) - z(t)|$)

c°/ $x : I \to U$ sol. de $x' = f(t, x)$ de CI (t_0, x_0) SSI $x \in E$ et $\Phi(x) = x$

a°/ . Soit $x \in E$. Alors : $\forall t \in I$, $\forall s \in [t_0, t]$, $(s, x(s)) \in \mathcal{C}$

donc $f(s, x(s))$ existe et $\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$ existe.

. $\Phi(x) : I \to \mathbb{R}^n$ est donc bien définie et continue.

. $\|\Phi(x)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\,ds \leq \varepsilon_0 M \leq R$

cylindre de sécurité

où $M = \sup_{(t,x) \in \mathcal{C}} \|f(t, x)\|$

donc $\Phi(x) : I \longrightarrow B_f(x_0, R)$ et $\Phi(x) \in E$

Donc, Φ est bien définie.

b/ $B_f(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et $\mathbb{R}^n$ est complet donc $B_f(x_0,R)$ est complet.

On a alors $E = \mathcal{C}_b(I, B_f(x_0,R))$ donc $\boxed{(E, d_\infty) \text{ est complet}}$

c/ Puisque $\mathcal{C}$ est un cylindre de sécurité, une solution de $x' = f(t,x)$ de CI (t_0, x_0) définie sur $I \subset]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[$ est tracée dans $B_f(x_0, R)$ donc d'après 1), $\boxed{\text{c/ est vérifié}}$

3) **Lemme :** Soit E un espace métrique complet et $\phi : E \to E$.
Si ϕ admet une itérée strictement contractante, alors ϕ admet un unique point fixe.

- Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ tel que ϕ^p soit strictement contractante. Alors par le théorème du point fixe de Picard, il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $\phi^p(x_0) = x_0$.

On a alors
$$\phi^{p+1}(x_0) = \phi(x_0)$$
$$\phi^p(\phi(x_0)) = \phi(x_0)$$
donc $\phi(x_0)$ est un point fixe de ϕ^p et par unicité $\boxed{\phi(x_0) = x_0.}$

- Si $y \in E$ est un point fixe de ϕ, alors $\phi(y) = y$
donc $\phi^p(y) = y$
donc $y = x_0$ et $\boxed{\phi \text{ admet un unique point fixe}}$

4) **Lemme :** $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \forall (y,z) \in E^2$

$$\|(\phi^p(y) - \phi^p(z))(t)\| \leq \frac{k^p}{p!} |t - t_0|^p \, d_\infty(y,z) \qquad (H_p)$$

On le montre par récurrence sur p

- $p = 0$: $0 \leq d_\infty(y,z)$ donc $\boxed{(H_0) \text{ est vérifiée}}$

. soit $p \in \mathbb{N}$. OSP (H_p) vérifiée. M.q. (H_{p+1}) est alors vérifiée

$t \in I$, $(y,z)^2 \in E$. OSP $t \geq t_0$

$$\|(\phi^{p+1}(y) - \phi^{p+1}(z))(t)\| = \|(\phi(\phi^p(y)) - \phi(\phi^p(z)))(t)\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, \phi^p(y)(s)) - f(s, \phi^p(z)(s))\| \, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} k \times \|\phi^p(y)(s) - \phi^p(z)(s)\| \, ds \quad f \text{ k-lip.}$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} k \times \frac{k^p}{p!} (s-t_0)^p \, d_\infty(y,z) \, ds \quad \text{H.R.}$$

$$\|(\phi^{p+1}(y) - \phi^{p+1}(z))(t)\| \leq \frac{k^{p+1}}{(p+1)!} (t-t_0)^{p+1} \, d_\infty(y,z)$$

donc (H_{p+1}) est vérifiée, ce qui conclut la récurrence.

5) Itérée contractante et conclusion

D'après 4), $\forall t \in I$ $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall (y,z) \in E^2$

$$\|(\phi^p(y) - \phi^p(z))(t)\| \leq \frac{k^p}{p!} \varepsilon_0^p \, d_\infty(y,z)$$

donc $$d_\infty(\phi^p(y), \phi^p(z)) \leq \frac{k^p}{p!} \varepsilon_0^p \, d_\infty(y,z)$$

Or, $\dfrac{(k\varepsilon_0)^p}{p!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \dfrac{(k\varepsilon_0)^p}{p!} < 1$

ϕ^p est alors strictement contractante, ce qui conclut la démonstration.

(A)

Cauchy - Lipschitz global : raisonnement par connexité

Soit $(t_0, x_0) \in J \times U$

Soient $x_1 : I_1 \to U$ et $x_2 : I_2 \to U$ deux solutions de $x' = f(t,x)$ de CI (t_0, x_0), où $I_1 \subset J$ intervalle ouvert tel que $t_0 \in I_1$, $I_2 \subset J$ intervalle ouvert tel que $t_0 \in I_2$.

M.q. $x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$

$t_0 \in I_1 \cap I_2$, donc $I_1 \cap I_2$ est un intervalle ouvert donc $I_1 \cap I_2$ est connexe.

Soit $A = \{ t \in I_1 \cap I_2 \ / \ x_1(t) = x_2(t) \}$

- $A \subset I_1 \cap I_2$ et $t_0 \in A$ donc A est non vide
- $A = (x_1 - x_2)^{-1}(\{0\}) \cap (I_1 \cap I_2)$ et $x_1 - x_2$ est continue donc A est fermé dans $I_1 \cap I_2$
- Soit $\theta \in A$. On pose $y_0 = x_1(\theta) = x_2(\theta)$.

On applique alors le théorème de CL local pour la CI (θ, y_0), et l'unicité nous dit que $x_1 = x_2$ sur un voisinage ouvert de θ (dans $I_1 \cap I_2$ car il est ouvert).

donc A est ouvert dans $I_1 \cap I_2$

A ouvert, fermé non vide de $I_1 \cap I_2$ connexe donc $A = I_1 \cap I_2$,

et on a bien $\boxed{x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}}$

Pour la leçon 221

Lemme de Gronwall (admis)

$I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $y : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose qu'il existe $k > 0$, $b \in \mathbb{R}$ / $\forall t \in I$, $\|y'(t)\| \leq k\|y(t)\| + b$.

Alors : $\forall (t_0, t) \in I^2$,
$$\boxed{\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + b \times \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}}$$

Lemme : Existence globale en croissance sous linéaire.

Soit $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sous les conditions de C.L.

On suppose qu'il existe $\alpha : J \to \mathbb{R}$ et $\beta : J \to \mathbb{R}$ continues, $\alpha(t) \geq 0$ telles que $\forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n$, $\|f(t,x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t)$.

Alors les solutions maximales de $x' = f(t,x)$ sont globales.

Démonstration

Soit $x :]t_-, t_+[\subset J \to \mathbb{R}^n$ solution maximale de c.i. (t_0, x_0).

Dans le futur de t_0 :

Par l'absurde, on suppose $t_+ < \operatorname{Sup} J$.

On pose alors $k = \operatorname{Sup}_{[t_0, t_+]} \alpha(t)$ $b = \operatorname{Sup}_{[t_0,t_+]} \beta(t)$.

et on a : $\forall t \in [t_0, t_+[$, $\|x'(t)\| \leq k\|x(t)\| + b$ Gronwall

donc $\|x(t)\| \leq \underbrace{\|x_0\| e^{k(t_+ - t_0)} + b \times \frac{e^{k(t_+-t_0)} - 1}{k}}_{M}$

donc $x(t) \in B_f(0, M)$ ← compact de $\mathbb{R}^n$, en contradiction avec le lemme des bouts.

donc $t_+ = \operatorname{Sup} J$ donc x est "globale dans le futur" (idem pour passé)

Ⓐ

CL
④
V1

Th. (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soit $A : J \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad b : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\qquad t \longmapsto A(t) \qquad\qquad t \longmapsto b(t)$.

et $f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\qquad (t, x) \longmapsto A(t)x + b(t)$.

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale de $x' = f(t,x)$ de c.i. (t_0, x_0). De plus, cette solution est globale.

Démonstration

1) Existence / unicité

- A et b sont continues donc f est continue.
- Soit $K \subset J$ un compact.

On pose $k = \sup_{t \in K} \|A(t)\|$.

$\forall t \in K, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)(x-y)\|$

$$\leq \|A(t)\| \, \|x-y\|$$

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k \|x-y\|$$

donc f est localement lipschitzienne par rapport à la 2nde variable

$\Rightarrow$ hyp. de CL sont vérifiées $\Rightarrow$ existence et unicité

2) Solution globale

$$\forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}^n, \quad \|f(t,x)\| \leq \overbrace{\|A(t)\|}^{\in \mathcal{C}^0(J)} \|x\| + \overbrace{\|b\|}^{\in \mathcal{C}^0(J)}$$

et $f : J \times \mathbb{R}^n$ donc par le lemme les solutions max sont globales.